Dif. Denk I Final Çözümleri

1) $y' = \frac{2}{2y-3x+1} + \frac{3}{2}$, $y(0)=1$.

Denklem 3 a) dır. $u = 2y-3x+1$ (veya $u = 2y-3x$) alınırsa $u' = 2y'-3 \Rightarrow y' = \frac{u'+3}{2} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2} + \frac{3}{2}$ olur. Denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{u'}{2} + \cancel{\frac{3}{2}} = \frac{2}{u} + \cancel{\frac{3}{2}} \quad \frac{du}{dx} = \frac{4}{u} \Rightarrow \int u\,du = \int 4\,dx \Rightarrow \frac{u^2}{2} = 4x + c$$

$\frac{(2y-3x+1)^2}{2} = 4x + c$ genel çözüm bulunur. $y(0)=1$ olması istendiği için genel çözümde $x=0$, $y=1$ yazılırsa

$\frac{(2.1-3.0+1)^2}{2} = 4.0 + c \Rightarrow c = \frac{9}{2}$ olur. İstenen çözüm $\frac{(2y-3x+1)^2}{2} = 4x + \frac{9}{2}$ olur.

2) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{y-x}{x}(\ln(y-x) - \ln x)$ Bu denklem SDH dir.

$y' = \frac{y}{x} + \frac{y-x}{x} \ln \frac{y-x}{x}$ şekl. yazılırsa sağ tarafta $x \to \lambda x$ $y \to \lambda y$ yazıldığında sağ taraf değişmez. O halde $y = ux$, $y' = u'x + u$ dönüşümü denkleme uygulanırsa

$$u'x + \cancel{u} = \cancel{\frac{ux}{x}} + \frac{ux-x}{x} \ln \frac{ux-x}{x} \Rightarrow u'x = (u-1)\ln(u-1)$$

$$\frac{du}{dx}x = (u-1)\ln(u-1) \Rightarrow \int \frac{du}{(u-1)\ln(u-1)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{\ln(u-1)} \frac{1}{u-1}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln(u-1) = t$ $\quad \frac{1}{u-1}du = dt$ olur. $\int \frac{1}{t}dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln t = \ln x + \ln c$

$t = cx \Rightarrow \ln(u-1) = cx$, $u = \frac{y}{x}$ yazılırsa

genel çözüm $\boxed{\ln\left(\frac{y}{x} - 1\right) = cx}$ veya $\frac{y}{x} - 1 = c_1 e^x$ $(c_1 = e^c)$ olur.

3) $y' + \frac{\cot y}{x} = x^{-1} e^{x} \left(\frac{1}{\sin y} - \sin y \right)$ Denklem düzenlenirse

$$y' + \frac{1}{x} \frac{\cos y}{\sin y} = x^{-1} e^{x} \left(\frac{1 - \sin^2 y}{\sin y} \right)$$

$$y' \cdot \sin y + \frac{1}{x} \cos y = x^{-1} e^{x} (1 - \sin^2 y)$$

$$y' \cdot \sin y + \frac{1}{x} \underline{\cos y} = x^{-1} e^{x} (\cos^2 y)$$ $u = \cos y$ alınırsa

$u' = -\sin y \cdot y'$ olduğundan denklem

$$-u' + \frac{1}{x} u = x^{-1} e^{x} u^2 \Rightarrow u' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{P(x)} u = \underbrace{- x^{-1} e^{x}}_{Q(x)} u^{\overset{\alpha}{2}}$$ BD

$V = u^{1-\alpha}$ $V = u^{1-2} = u^{-1}$ dönüşümü uyg.

denklem $V' + (1-\alpha) P(x) V = (1-\alpha) Q(x)$ LD olur.

$$V' - \left(-\frac{1}{x} \right) V = -\left(-x^{-1} e^{x} \right) \Rightarrow V' + \frac{1}{x} V = x^{-1} e^{x}$$

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$ olmaktadır

$$\lambda(x) \cdot V = \int \lambda(x) \cdot x^{-1} e^{x} dx + c \Rightarrow x V = \int x \cdot x^{-1} e^{x} dx + c$$

$$x u^{-1} = \int e^{x} dx + c \Rightarrow \boxed{x (\cos y)^{-1} = e^{x} + c}$$

---

4) $x^3 y' + x^4 y^2 - x^2 y + 2 = 0$ bir özel çözümü $y_1 = \frac{1}{x^2}$ Denklem RD dir. $y' \underbrace{+ x}_{P(x)} y^2 \underbrace{- \frac{1}{x}}_{Q(x)} y + \frac{2}{x^3} = 0$ şek yazılırsa Bu denkleme

$y = y_1 + \frac{1}{u}$ yani $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{u}$ dönüş uyg. denklem $u' - (2P(x) y_1 + Q(x)) u = P(x)$

LD denk. dönüşür. O halde $u' - \left(2x \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) u = x \Rightarrow u' - \frac{1}{x} u = x$ LD

$$\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} \cdot u = \int \frac{1}{x} \cdot x dx + c \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} \frac{1}{y - \frac{1}{x^2}} = x + c}$$ bulun

5) Merkezi $(-1,2)$ olan çember ailesi $(x-(-1))^2+(y-2)^2=r^2$ olur. Buna karşılık gelen dif. denk. bir kez türevini alırsak r keyfi sabiti yok old.dan $2(x+1)+2(y-2).y'=0 \Rightarrow x+1+(y-2)y'=0$ dif. denk bulunmuş olur. Dik yörünge istendiği için $y' \to -\frac{1}{y'}$ yazılırsa $x+1+(y-2).(-\frac{1}{y'}) \Rightarrow x+1=\frac{y-2}{y'}$

$y'=\frac{y-2}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y-2}{x+1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y-2}=\int\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln(y-2)=\ln(x+1)+b$

şek dik yörünge bulunur. $(-1,-2)$ noktasından geçen dik yörünge istendiği için genel çözümde $x=-1, y=-2$ yazılırsa $\ln(-2-2)=\ln(-1+1)+b \Rightarrow \ln|-4|=\ln 0+b$

$\ln 0$ tanımsız old.dan b bulunamaz. Dolayısıyle $(-1,-2)$ nok. geçen dik yörünge yoktur.

6) $y'=f(x,y)$ sadece x'e bağlı integral çarpanı varsa lineer olduğunu göstermek için bu denklemin $y'+P(x)y=Q(x)$ şeklinde ya da $y'=-P(x)y+Q(x)$ şeklinde yani $f(x,y)=-P(x)y+Q(x)$ şeklinde yazıldığını göstermemiz gerekir.

Bunun için $y'=f(x,y) \Rightarrow dy-f(x,y)dx=0$ veya $\underbrace{f(x,y)}_{P}dx\underbrace{-1}_{Q}dy=0$ şeklinde yazılır. x'e bağlı iç old. için $\frac{P_y-Q_x}{Q}$ ifadesinin x bağlıdır.

Yani $\frac{P_y-Q_x}{Q}=P(x)$ şek yazılır. $P_y=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $Q_x=0$

old.dan $\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-0}{-1}=P(x) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-P(x) \Rightarrow \int\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=-\int P(x)dy$

$f(x,y)=-P(x)y+Q(x)$ olur. Bu da istenendir.

Mat. Böl. Dif. Denk I Final 03.01.2019

1) $y' = \dfrac{2}{2y-3x+1} + \dfrac{3}{2}$, $y(0)=1$ 2) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{y-x}{x}(\ln(y-x) - \ln x)$

3) $y' + \dfrac{\cot y}{x} = x^{-1}e^{x}\left(\dfrac{1}{\sin y} - \sin y\right)$ denk. genel çözümünü bulunuz

4) $x^3y' + x^4y^2 - x^2y + 2 = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \frac{1}{x^2}$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

5) Merkezi $(-1,2)$ olan çember ailesinin $(-1,-2)$ noktasından geçen dik yörüngesi varsa bulunuz.

6) $y' = f(x,y)$ denkleminin sadece x'e bağlı integral çarpanı varsa bu denklemin lineer olduğunu gösteriniz.

*) Bu zamana kadar görmüş olduğunuz matematik derslerinin hayata bakışınıza katkısının olup-olmadığını açıklayınız.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar... N.A.

$\left(u = y^{1-\alpha} \right.$, $u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x)$, $y = y_1 + \frac{1}{u}$, $\left. u' - (2P(x)y_1 + Q(x))u = P(x) \right)$